

Sinteza teorie clasa a IX-a, școală profesională

Mulțimea numerelor reale

- 1) Reguli de operare cu numere întregi
- 2) **Valoarea absolută** (sau **modulul**) unui număr real x se notează $|x|$; $|x| \geq 0$, pentru orice număr real x

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

3) Puteri și radicali

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ a^n : a^m &= a^{n-m} \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \\ (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{-n} &= \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0 \\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} &= \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad a, b \neq 0 \\ (-1)^{\text{par}} &= +1 \\ (-1)^{\text{impar}} &= -1 \\ 0^n &= 0, \quad n \neq 0 \\ 1^n &= 1 \\ a^1 &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{a \cdot b} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\ \sqrt{a^2} &= (\sqrt{a})^2 = |a| \\ (\sqrt{a})^3 &= a\sqrt{a} \\ \sqrt{a^2 + b^2} &\neq a + b \end{aligned}$$

4) Formule de calcul prescurtat:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

5) Media aritmetică și media geometrică a două numere reale pozitive:

$$m_a = \frac{a+b}{2}, \quad m_g = \sqrt{ab}$$

Inegalitatea mediilor (numere pozitive a, b): $m_g \leq m_a$

Elemente de logică matematică: propoziții, predicate, metoda inducției matematice

1. **Propoziția** este un enunț adevărat sau fals, însă nu ambele simultan. Notăția: p, q, r, s etc.

$$v(p) = \begin{cases} 1, & p - \text{propozitie} : (A) - \text{adevădăvărată} \\ 0, & p - \text{propozitie} : (F) - \text{falsă} \end{cases}$$

Compunerea propozițiilor se face cu ajutorul conectorilor logici: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența, definiți prin tabele de adevăr:

p	$\neg p$	p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \vee q$	p	q	$p \rightarrow q$	p	q	$p \leftrightarrow q$
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1

2. **Predicatul** este o propoziție dependentă de una sau mai multe variabile, adevărată sau falsă în funcție de valorile atribuite variabilei, respectiv, variabilelor.

Notăția: $p(x), q(x, y), r(a, b, c), s(a_1, a_2, \dots, a_n), n \geq 1, n \in N$.

3. **Tautologia** este o formulă propozițională adevărată, notată $\alpha(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n), n \geq 1, n \in N$, oricare ar fi valoarea de adevăr a propozițiilor componente: $p_i, i = 1, n, n \in N^*$.

Exemple:

1) Legile lui De Morgan: $\overline{p(x) \wedge q(x)} \equiv \overline{p(x)} \vee \overline{q(x)}$; $\overline{p(x) \vee q(x)} \equiv \overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}$;

2) Principiul dublei negații: $\overline{\overline{p(x)}} \equiv p(x)$;

3) Principiul terțiului exclus: $p(x) \vee \overline{p(x)}$;

4) Principiul contradicției: $\forall p(x) : p(x) \wedge \overline{p(x)} \text{ (F)}$

5) Principiul noncontradicției: $\overline{p(x) \wedge \overline{p(x)}}$.

Metoda inducției matematice:

O propoziție (afirmație) oarecare $P(n)$, ce depinde de un număr natural n , este adevărată pentru orice n natural, dacă:

- I. $P(1)$ este o propoziție (afirmație) adevărată;
- II. Dacă $P(k)$ este adevărată pentru un k arbitrar fixat, atunci rezultă că $P(k+1)$ este adevărată

Progresii aritmetice

Definiție: Numim **progresie aritmetică** un șir de numere reale în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din cel precedent prin adăugarea aceluiași număr r , numit rație.

Definiție	$a_n = a_{n-1} + r, \forall n \geq 2$
Termenul general:	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, \forall n \geq 2$
Rația:	$r = a_n - a_{n-1}, \forall n \geq 2$
Suma primilor n termeni:	$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, \forall n \geq 2$
Proprietatea caracteristică	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$
Numerele a, b, c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice (sunt în progresie aritmetică) dacă:	$b = \frac{a + c}{2}$

Progresii geometrice

Definiție: Numim **progresie geometrică** un șir de numere reale în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din cel precedent prin înmulțirea aceluiași număr q , numit rație.

Definiție	$b_n = b_{n-1} \cdot q, q \neq 0$
Termenul general:	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n > 1$
Rația:	$q = \frac{b_n}{b_{n-1}}, b_{n-1} \neq 0$
Suma primilor n termeni:	$S_n = \begin{cases} b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ nb_1, & q = 1 \end{cases}$
Proprietatea caracteristică	$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$
Numerele a, b, c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice (sunt în progresie aritmetică) dacă:	$b = \sqrt{a \cdot c}$

FUNCȚII - generalități

$f: A \rightarrow B, f(x) = \dots$ **A = domeniu de definiție**, **B = domeniu de valori**, $f(x) = \dots$ formula de calcul;

Graficul funcției: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$;

Un punct aparține graficului funcției: $M(x, y) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = y$

Intersecția graficului cu axele de coordonate:

$G_f \cap Ox = A(x, 0) \Leftrightarrow f(x) = 0$	intersecția cu Ox se rezolvă ecuația $f(x) = 0$
$G_f \cap Oy = B(0, y) \Leftrightarrow f(0) = y$	intersecția cu Oy se calculează $f(0)$

Pentru a determina *punctele de intersecție ale graficelor a două funcții f și g*, se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} f(x) = y \\ g(x) = y \end{cases}.$$

Paritate:

- f este funcție pară dacă $f(-x) = f(x)$
- f este funcție impară dacă $f(-x) = -f(x)$

Alte proprietăți: mărginire, axe și puncte de simetrie, imaginea funcției

FUNCȚIA DE GRADUL I

1) *Forma generală:* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f = a \cdot x + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

2) *Ecuația atașată:* $a \cdot x + b = 0; \Rightarrow a \cdot x = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$.

3) *Graficul* funcției de gradul I este o dreaptă.

4) *Monotonia* funcției de gradul I:

- a) Dacă $a > 0$, atunci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ (graficul, privit de la stânga la dreapta, „urcă”).
- b) Dacă $a < 0$ f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ (graficul, privit de la stânga la dreapta, „coboară”).

5) *Semnul* funcției de gradul I (tabelul de semn):

	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
	0	
contrar lui a	0	același semn cu a

$(-\frac{b}{a})$ este soluția ecuației $f(x) = 0$